NZZ Online

2. März 2011, Neue Zürcher Zeitung

Eine solide Grundlage für eine kombinatorische Vermutung

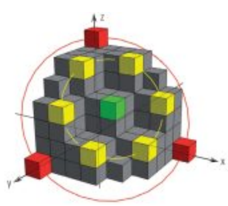
Neu entfachte Kontroverse um die Rolle des Computers beim Beweisen von mathematischen Theoremen

Richard Peter Stanleys letztes Rätsel wurde vor kurzem gelöst – mit Hilfe von acht Computern. Die Aufnahme zeigt den Mathematiker 1973 in Oberwolfach.
(Bild: Konrad Jacobs (cc-by-sa 2.0))

Drei Mathematiker haben kürzlich gezeigt, dass eine seit fast drei Jahrzehnten bestehende Vermutung der Kombinatorik wahr ist. Dass sie den Beweis mit Computerhilfe erbrachten, stösst nicht überall auf Wohlwollen.

George Szpiro

In einem 1985 in Montreal gehaltenen Vortrag hatte der Mathematiker Richard Stanley vom Massachusetts Institute of Technology ein Dutzend Fragen aus dem Gebiet der Kombinatorik aufgeworfen. Bis 1999 konnten alle diese Fragen beantwortet werden – bis auf eine. Jetzt ist auch dieses Rätsel gelöst. Mit Computerhilfe haben Christoph Koutschan und Manuel Kauers vom Institut für symbolisches Rechnen der Universität Linz zusammen mit Doron Zeilberger von der Rutgers University im amerikanischen Gliedstaat New Jersey eine Vermutung bewiesen, an der sich Kombinatoriker auf der ganzen Welt die Zähne ausgebissen hatten.[1]



(Bild: NZZ-Infografik / tcf.)

Bei den kombinatorischen Problemen, die Stanley 1985 aufgelistet hatte, geht es um sogenannte planare Partitionen. Darunter versteht man eine Stapelung von Klötzen auf einer schachbrettartigen Ebene, die folgender Bedingung genügen muss: Wenn man sich in dem Raster nach rechts oder nach vorne bewegt, darf die Höhe der Türme nicht zunehmen. Unter den verschiedenen Möglichkeiten, die Klötze entsprechend dieser Vorgabe zu stapeln, zeichnen sich manche durch eine hohe Symmetrie aus: Wenn die Position mit den Koordinaten (i, j, k) mit einem Klotz besetzt ist, so sind es auch die Positionen mit den permutierten Koordinaten (i, k, j), (j, i, k), (j, k, i), (k, i, j) und (k, j, i). Ist dies der Fall, so spricht man von einer total symmetrischen planaren Partition (TSPP) (siehe Abbildung).

Keine Chance ohne Computer

Die Frage, wie viele total symmetrische Partitionen es bei einem Raster mit vorgegebener Seitenlänge gibt, wurde 1995 mit einer eleganten Formel beantwortet. Als härtere Knacknuss erwies sich jedoch die Frage, wie viele dieser TSPP eine bestimmte Anzahl von Orbits aufweisen (so nennt man die ringförmigen Kurven, die die permutierten Koordinaten miteinander verbinden). Schon 1983 hatten die Amerikaner George Andrews und David Robbins die Vermutung geäussert, dass die Antwort auf diese Frage durch die Koeffizienten eines gewissen Polynoms gegeben wird. Um das zu beweisen, vertrauten Koutschan, Kauers und Zeilberger auf die Hilfe von Computern. Selbst mit dieser tatkräftigen Unterstützung hatten die Forscher immense Schwierigkeiten zu überwinden.

2,5 Tonnen Papier

Eine erste Version des Beweises hätte eine Rechenleistung von 1,7 Milliarden Tagen benötigt. Durch verbesserte Algorithmen konnte die erforderliche Rechenleistung schrittweise auf 35 Tage reduziert werden. Mit acht simultan arbeitenden Computern hätte der Beweis somit innert 4 Tagen bewerkstelligt werden können – hätte nicht eine Putzfrau eines Nachts das Stromkabel eines der Computer aus der Steckdose gezogen. So mussten Berechnungen teilweise wiederholt werden. Schliesslich war es aber so weit. Der Output betrug 7 Gigabytes. Ein vollständiger Ausdruck hätte 2,5 Tonnen Papier erfordert.

Als die Autoren die Beschreibung ihres Beweises bei einer Zeitschrift für symbolische Logik einreichten, erlebten sie jedoch eine Überraschung. Die Publikation – «Ein Beweis der q-TSPP-Vermutung von George Andrews und Dave Robbins» – wurde von Gutachtern zwar als korrekt und publikationswürdig beurteilt, aber die Redaktoren bestanden auf einer Änderung des Titels, da es sich nicht um einen rigorosen Beweis handle. Daraufhin zogen die erbosten Autoren ihren Artikel wieder zurück. Zeilberger stellt sich auf den Standpunkt, dass die genaue Beschreibung eines Beweisverfahrens, das dann im Detail von Computern ausgeführt wird, mindestens so rigoros sei wie von Menschenhand geschaffene Beweise. Wie verschiedene Beispiele aus jüngster Zeit gezeigt hätten, könnten ja letztere auch falsch sein, obwohl sie einer akribischen Kontrolle unterworfen werden können.

Die Redaktion der «Proceedings of the National Academy of Sciences», einer nicht gerade gängigen Zeitschrift für mathematische Themen, war weniger kleinkariert und akzeptierte den Artikel. In einem Nachwort schreiben die Autoren, für die Andrews-Robbins-Vermutung gäbe es möglicherweise gar keinen eleganten, kurzen Beweis. Und Koutschan fragt, ob der mathematischen Gemeinschaft eine Tatsache vorenthalten bleiben dürfe, bloss weil der Beweis zu lang sei.

[1] PNAS, Online-Publikation vom 24. Januar 2011.