"Das können Computer nicht" - science.ORF.at

Der Linzer Mathematiker Manuel Kauers hat soeben mit zwei Kollegen einen neuartigen Beweis veröffentlicht. Kernstück des Beweises ist eine extrem lange Formel: Ausgeschrieben wäre sie rund eine Million Seiten lang.

Kategorie: Mathematik | Erstellt am 25.01.2011.

In einem Interview erklärt Kauers die dahinter stehende Zahlentheorie mit bunten Bausteinen - und warum Mathematiker nicht immer einig sind, was überhaupt ein Beweis ist.

science.ORF.at: Sie haben soeben eine mathematische Vermutung bewiesen - worum geht es dabei?

Manuel Kauers: Das ist eine Vermutung aus der Zahlentheorie, konkret geht es um sogenannte planare Partitionen.

Was ist eine Partition?

Eine Partition ist die Möglichkeit, eine ganze Zahl als Summe anderer ganzer Zahlen darzustellen. Eine Partition von 5 wäre etwa 2+3, eine andere wäre 1+4 und noch eine andere wäre 1+1+1+2 und so weiter. Die Partitionen sind schon seit Jahrhunderten gut untersucht, man weiß wie viele es gibt und welche arithmetischen Eigenschaften sie haben.

Und was ist eine planare Partition?

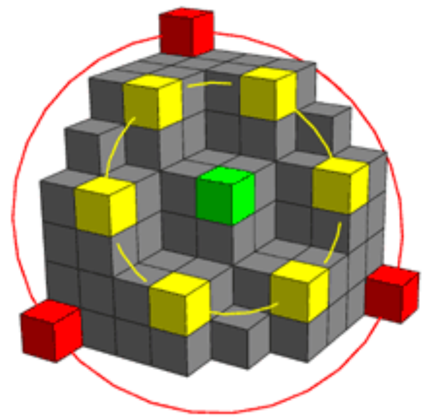
Hier schriebt man die Zahlen nicht in einer Zeile, sondern in einer Tabelle.

Was macht das für einen Unterschied?

Die Studie

"Proof of George Andrews's and David Robbins's q totally symmetric plane partition conjecture" <http://www.risc.jku.at/people/ckoutsch/qtspp/qtspp.pdf> von Christoph Koutschan, Manuel Kauers und Doron Zeilberger ist im Fachblatt "PNAS" erschienen (doi: 10.1073/pnas.1019186108).

Es gibt mehr Möglichkeiten. Ich kann 1+1 waagrecht und senkrecht schreiben - beide zählen dann als verschiedene Partitionen. Das kann man auch grafisch veranschaulichen: mit aus Würfeln bestehenden Türmen, die auf einem Schachbrettmuster stehen. Das Schachbrett entspricht der Tabelle und Türme sind die Zahlen, wobei die Höhe des Turmes dem Betrag der Zahl entspricht. Und dann kann man das Ganze noch normalisieren, indem man sagt: Die Türme sollen waagrecht und senkrecht abfallen.



Planare Partitionen visualisiert: Turmlandschaft auf einem Schachbrett.

Das ist eine Zusatzregel, die das Ganze noch schwieriger bzw. komplizierter macht?

Ja, ohne diese Regel wäre es sehr einfach. Und jetzt stellt sich die Frage: Wie viele Möglichkeiten bzw. Bauklotzmuster gibt es für eine gegebene Zahl? Das kann man mit einer Formel ausrechnen, in die man nur die Zahl und die Größe des Schachbretts eingeben muss.

Die Formel gab es schon?

Ja, seit etwa fünf Jahren. Wir haben das Problem noch weiter eingeschränkt und gesagt: Die Bauklotzmuster müssen noch gewisse Symmetrien erfüllen. Dafür gibt es wieder eine eigene Formel, die im Jahr 1995 bewiesen wurde. Drei Kollegen von mir haben diesen Beweis vor fünf Jahren auch mit dem Computer geführt.

Und ihr aktueller Beweis?

Der geht noch einen Schritt weiter. Wir haben nicht nur die Anzahl der Partitionen bestimmt, sondern auch deren Teile: Wenn in dem Bauklotzmuster eine Symmetrie herrscht, gibt es nämlich Gruppen von Würfeln, die sich durch Spiegelung oder Rotation aufeinander abbilden lassen. Die entsprechende Vermutung wurde von George Andrews und David Robbins im Jahr 1982 formuliert, und wir haben sie nun bewiesen. Das war die letzte noch offene Vermutung zu diesem Thema.

Manuel Kauers <http://www.kauers.de/> lehrt und forscht am Research Institute for Symbolic Computation (**RISC**

Das Kapitel der planaren Partitionen ist somit geschlossen?

Das kann man so sagen, ja.

Sie haben diesen Beweis nicht auf klassische Art geführt, sondern mit Hilfe des Computers.

Genau, das ist mein Spezialgebiet. Von planaren Partitionen verstehe ich gar nicht viel. Wir verwenden Computeralgebra für Beweise, die mit der Hand gerechnet viel zu umfangreich wären. Die entsprechenden Algorithmen gibt es seit den 90er Jahren, bei diesem Problem konnten wir das allerdings nicht so machen, wie es im Lehrbuch steht. Da hätte selbst der Computer länger gerechnet, als das Universum alt wird. Man möchte ja schließlich noch leben, wenn der Computer das Ergebnis auswirft. Mein Kollege Christoph Koutschan hat die Algorithmen verfeinert und damit so viel Rechenzeit eingespart, dass wir das Ergebnis schon vor dem Ende des Universums in Händen hatten.

<http://www.risc.jku.at/>) der Johannes Kepler Universität Linz.

Für ihren Beweis haben sie eine Hilfsformel verwendet, die ausgedruckt eine Million A4-Seiten umfassen würde. Das ist noch immer eine ganze Menge.

Ja! Das entspricht etwa sieben Gigabyte Daten. Sie ist äquivalent zur Formel der Andrews-Robbins-Vermutung. Letztere ist klein, aber kompliziert, unsere Formel ist groß, aber einfach.

Folgen aus diesem Beweis konkrete Anwendungen?

Ich glaube, da muss ich passen. Aber es gibt Anwendungen in anderen Gebieten. Beispielsweise kann man mit Computeralgebra numerische Verfahren beschleunigen. Etwa, um die an einem Flugzeug wirkenden Kräfte zu simulieren.

Wenn man mit Mathematikern spricht, gewinnt man den Eindruck, dass Computerbeweise als Beweise zweiter Klasse gelten. Stimmt das?

Ja, das ist leider so, aber es ändert sich langsam. Das ist auch eine philosophische Frage: Was ist überhaupt ein Beweis? Man kann sagen: Ein Beweis ist eine Folge von logischen Schritten, die von einer Vermutung ausgeht und am Ende ihre Korrektheit belegt. Wenn man diesen Standpunkt einnimmt, dann ist ein Computerbeweis ein Beweis ohne Wenn und Aber. Man kann aber auch noch mehr verlangen und etwa sagen: Ein Beweis soll auch erklären, warum eine Aussage stimmt. Das kann ein Computerbeweis nicht.

Er bestimmt die Richtigkeit, aber er liefert keine neuen Einsichten.

Genau, er gibt keine Erklärungen.

Der legendäre ungarische Mathematiker Paul Erdös hat einmal gesagt: Mathematiker sind Menschen, die Kaffee in Theoreme verwandeln. Der Satz gilt in ihrem Fall nicht mehr ganz.

Das ist richtig, unsere Computer trinken keinen Kaffee.

Es gibt in der Mathematiker-Gemeinde eine kleine Spielerei, die sogenannte Erdös-Zahl: Ein Forscher, der etwas mit Paul Erdös veröffentlicht hat, hat eine Erdös-Zahl von eins - das ist das Optimum. Wenn jemand mit diesem Forscher zusammengearbeitet hat, hat er/sie eine Erdös-Zahl von zwei. Ein Kettenglied mehr bedeutet drei usw. Welche Zahl haben sie?

Drei.

Könnte man heute noch weiter nach unten kommen?

Es leben noch Leute mit einer **Erdös-Zahl** <http://de.wikipedia.org/wiki/Erd%C5%91s-Zahl> von eins. Eine zwei wäre also möglich.

Interview: Robert Czepel

Mehr zu diesem Thema:

- **Schwerpunkt Mathematik** <http://science.orf.at/mathematik>