Wegzählproblem mit Symbolischem Rechnen gelöst

How many roads…?

Ob Bob Dylan in seinem Klassiker die Kombinatorik besang, wissen wir nicht. Ausschließen sollte man es nicht, denn das Zählen von Wegen ist dort seit jeher ein heißes Thema. Am RISC wurde ein wichtiges offenes Wegzählproblem gelöst, das jetzt in den Proceedings of the US National Academy of Sciences (PNAS) veröffentlicht wurde.

Solche Fragestellungen werden der Kombinatorik unter anderem von der statistischen Mechanik vorgelegt, wo man zum Beispiel bestimmen will, wie viele verschiedene Wege ein durch ein Kristallgitter diffundierendes Molekül nehmen kann. Dr. Manuel Kauers und DI Christoph Koutschan vom Institut für Symbolisches Rechnen, RISC, und Prof. Doron Zeilberger von der Rutgers University in New Jersey fanden einen neuen Ansatz, mit dem sie ein wichtiges offenes Wegzählproblem lösten.

Wege am Schachbrett

In diesem Problem ging es um Wege auf einer Art Schachbrett, das in zwei Richtungen, nach oben und nach rechts, ins Unendliche fortgesetzt ist. Jedes Feld wird mit seinen Koordinaten (i,j) bezeichnet, wobei i und j natürliche Zahlen sind. Eine Figur startet in der Ecke (0,0) und bewegt sich in jedem Schritt auf ein benachbartes Feld. Nach n Schritten soll sie wieder zum Startpunkt (0,0) zurückgekehrt sein. Als Schritte sind aber nur bestimmte Richtungen zugelassen, nämlich rechts, links, rechts oben und links unten. Wir bezeichnen mit $f(n)$ die Anzahl der möglichen Wege. Zum Beispiel ist $f(2) = 2$.

Rundwege

Im Jahre 2001 stellte der amerikanische Mathematiker Ira Gessel die Vermutung auf, dass sich die Anzahl der Rundwege, also solcher Wege, die wieder zum Ursprung zur¨uckkehren, mit folgender Formel berechnen lässt:

$$f(2n,0,0) = 16^n \frac{(5/6)_n (1/2)_n}{(5/3)_n (2)_n}$$

Hierbei bezeichnet $(x)n$ die steigende Faktorielle, die als $x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdots(x+n-1)$ definiert ist. Man sieht leicht, dass $f(n)=0$, wenn n ungerade ist, da jeder Schritt die Figur entweder um eine Einheit nach rechts oder links bewegt. Sollte die Formel stimmen, könnten wir also zum Beispiel ohne großen Aufwand die Zahl der Rundwege mit 6 Schritten berechnen:

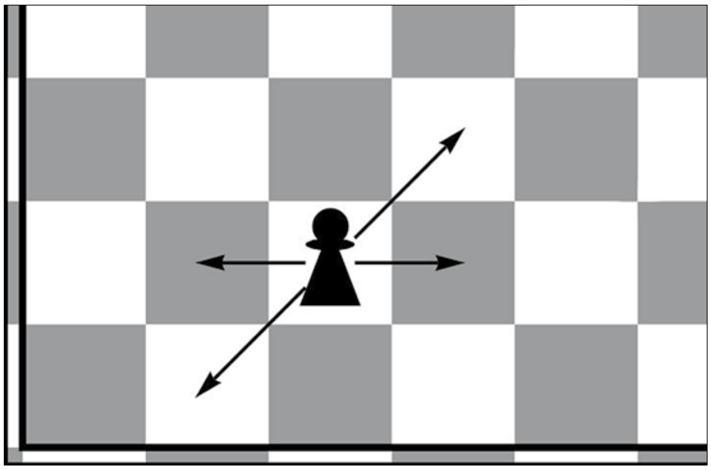
$$f(6,0,0) = 16^3 \frac{(\frac{5}{6}\cdot\frac{11}{6}\cdot\frac{17}{6})\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2})}{(\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{11}{3})\cdot(2\cdot 3\cdot 4)} = 85.$$

Kein Beweis

Das Abzählen aller Möglichkeiten wäre hier schon recht aufwändig gewesen. Das Problem war nun, dass es bisher keinen Beweis für diese Formel gab. Man konnte zwar nachrechnen, dass sie für kleine Werte von n stimmt, aber ob sie immer das richtige Ergebnis liefert, war eine ungelöste Frage.

Computeralgebra

Nachdem jahrelang erfolglos an diesem Problem getüftelt worden war, konnte diese Frage nun endlich positiv beantwortet werden. Der Beweis wurde mit Hilfe von Computeralgebra konstruiert, denn dazu waren komplizierte Rechnungen erforderlich, die unmöglich von Hand hätten gemeistert werden können. Die am RISC entwickelte Software war dieser Aufgabe jedoch gewachsen und konnte nach mehrstündiger Rechenzeit eine Rekursion von wahrhaft monströsen Ausmaßen bestimmen: Um sie zu Papier zu bringen, wären etwa 300 Seiten notwendig. Als Koeffizienten kommen Zahlen mit bis zu 386 Dezimalstellen vor.



Die Figur am Schachbrett soll einen Rundweg zurücklegen.

Zur Person

Dr. Manuel Kauers
Institut für Symbolisches Rechnen, RISC

DI Christoph Koutschan
Institut für Symbolisches Rechnen, RISC

Forschungsschwerpunkte:
Die Forschungsschwerpunkte von Kauers und Koutschan liegen im Symbolischen Rechnen.

Kontakt

Dr. Manuel Kauers
Tel.: 0732 24 68-9958
Mail: manuel.kauers@risc.uni-linz.ac.at

DI Christoph Koutschan
Tel.: 0732 24 68-9927
Mail: koutschan@risc.uni-linz.ac.at
www.risc.uni-linz.ac.at

Beweis

Ist dieser Rechenaufwand wirklich nötig, oder lässt sich diese einfache Formel auch mit einfachen Mitteln beweisen? Doron Zeilberger glaubt nicht an einen „einfachen" Beweis und hat einen **Preis von 100 US-Dollar** für einen Beweis in Aussicht gestellt, der ohne Zuhilfenahme des Computers auskommt und auf maximal fünf DIN-A4-Seiten in Standardschrift passt. Falls Sie einen solchen finden, schicken Sie ihn bitte an die Redaktion! Mathematische Einzelheiten unter: http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/gessel.html